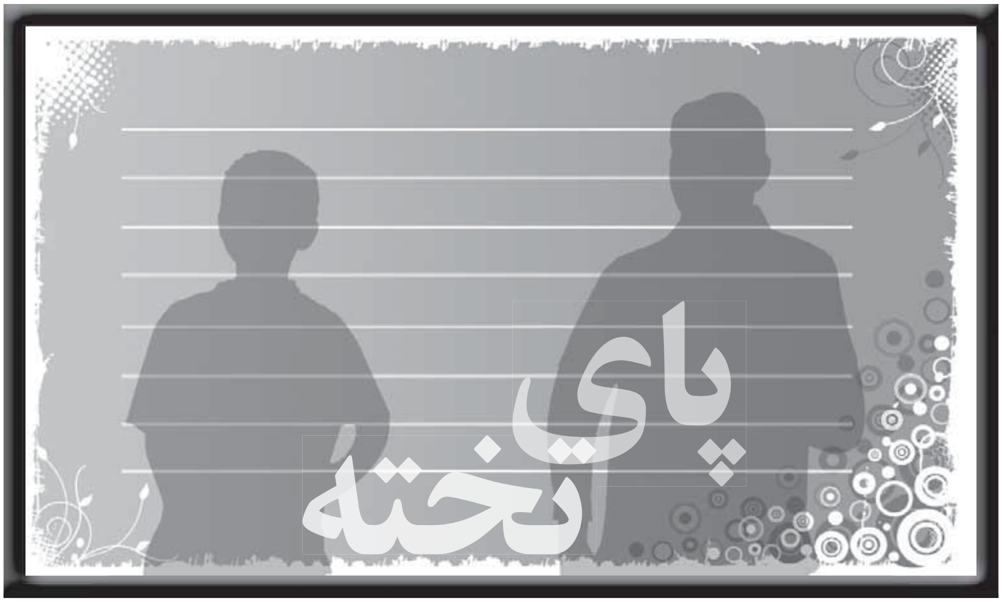
آموزشی

دکتر محرم‌نژاد ایردموسی، عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی



اشاره

دومین شمارهٔ پای تخته را در سال تحصیلی جدید پیش رو دارید. در این شماره ۱۰ مسئلهٔ جدید و جالب مطرح شده‌اند که از حل آن‌ها لذت خواهید برد. حل مسائل ۱۹۱ تا ۲۰۰ نیز در این شماره آمده‌اند.

بخش اول: مسئله‌ها

۲۲۱. اگر: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}=۱$، مقدار عبارت $\frac{a^۲}{b+c}+\frac{b^۲}{c+a}+\frac{c^۲}{a+b}$ را بیابید.

۲۲۲. مجموع همهٔ ریشه‌های حقیقی معادلهٔ زیر را بیابید.

$$(x^۲+۵x+۵)^{x^۲-۱۰x+۲۱}=۱$$

۲۲۳. چندجمله‌ای $f(x)$ در تساوی زیر صدق می‌کند. ضابطهٔ f را بیابید.

$$f(x)+(x+۱)^۳=۲f(x+۱)$$

۲۲۴. اگر: $|a-b|=۲$، $|b-c|=۳$ و $|c-d|=۴$، مجموع همهٔ مقادیر ممکن برای a-d را بیابید.

۲۲۵. مجموع دو عدد طبیعی را بیابید که حاصل‌ضرب آن‌ها برابر است با: $۱۰^{۱۳۹۵}$، اما هیچ‌کدام از آن دو عدد، رقم صفر ندارند.

۲۲۶. برای آنکه تساوی زیر صحیح باشد، تعداد جملات زیر رادیکال چندتاست؟

$$\sqrt{۱۷^۲+۱۷^۲+...+۱۷^۲}=۱۷^۲+۱۷^۲+۱۷^۲$$

۲۲۷. x را بیابید، اگر $x!=\frac{(۷!)!}{۷!}$.

۲۲۸. دو عدد یکان و دهگان عدد بزرگ $۹^{۸^{۷^{۶^{۵}}}}$ را بیابید (۹ به توان ۸ به توان ... به توان ۵)

۲۲۹. همهٔ اعداد طبیعی n را بیابید، به‌طوری که $\frac{(n+۱)^۷}{n+۷}$ عددی صحیح باشد.

۲۳۰. همهٔ اعداد اول p را بیابید، به‌طوری که عدد p رقمی $\overline{۱۱۱...۱}$ مضرب p باشد.

بخش دوم: راه‌حل‌ها

۱۹۱. a عددی است حقیقی به‌طوری که: $a^۲+\frac{۱}{a^۲}=۱۴$. مقدار $a^۳+\frac{۱}{a^۳}$ را به‌دست آورید.

$$a^۲+\frac{۱}{a^۲}=(a+\frac{۱}{a})^۲-۲=۱۴\rightarrow a+\frac{۱}{a}=\pm۴$$

$$a^۳+\frac{۱}{a^۳}=(a+\frac{۱}{a})^۳-۳(a+\frac{۱}{a})$$

$$=(\pm۴)^۳-۳(\pm۴)=\pm۶۴\mp۱۲=\pm۵۲$$

۱۹۲. بزرگ‌ترین توان ۲ را پیدا کنید که عدد $K=۷۵!-۷۱!$ را می‌شمارد.

می‌دانیم که توان عدد اول p در تجزیه !n برابر است با: $\sum_{k=۱}^{\infty}[\frac{n}{p^k}]$.

در نتیجه در تجزیه !۷۱، توان ۲ برابر است با: ۱+۲+۴+۸+۱۷+۳۵=۶۷.

از طرف دیگر داریم $k=۷۱!\,(۷۵\times۷۴\times۷۳\times۷۲-۱)$. در نتیجه بزرگ‌ترین توان ۲ در تجزیهٔ k برابر است با ۶۷.

۱۹۳. a، b و c اعدادی صحیح هستند، به‌طوری که: $۱\leq a<b<c$ و $a^۲+b^۲+c^۲=۱۴(a+b+c)$. حاصل a+b+c چه‌قدر است؟

می‌توان معادله را به فرم $(a-۷)^۲+(b-۷)^۲+(c-۷)^۲=۱۴۷$ تبدیل کرد. در نتیجه سه مربع سمت چپ یا هر سه فرد هستند یا فقط یکی فرد است. با بررسی حالت‌ها به جواب $۱۴۷=۱^۲+۵^۲+۱۱^۲$ می‌رسیم. چون $۱\leq a<b<c$، در نتیجه (a,b,c) برابر است با: (۸,۱۲,۸) یا (۶,۱۲,۸) و مجموع a+b+c برابر است با: ۳۸ یا ۳۶.

۱۹۴. ریشه‌های معادلهٔ $(x^۲-۲x+m)(x^۲-۲x+n)=۰$ که در آن $m,n\in R$، یک تصاعد حسابی با جملهٔ اول $\frac{۱}{۴}$ تشکیل داده‌اند. حاصل $|m-n|$ را به‌دست آورید.

فرض کنید ریشه‌ها $\frac{۱}{۴}$، $\frac{۱}{۴}+۲d$ و $\frac{۱}{۴}+۳d$ باشند. همچنین $r_۱$ و $r_۲$ ریشه‌های $x^۲-۲x+n=۰$ و $r_۳$ و $r_۴$ ریشه‌های $x^۲-۲x+m=۰$ باشند. چون: $r_۱+r_۲+r_۳+r_۴=۲+۲$، پس: $d=\frac{۱}{۲}$ و $r_۱,r_۲,r_۳,r_۴\in\left\{\frac{۱}{۴},\frac{۳}{۴},\frac{۵}{۴},\frac{۷}{۴}\right\}$.

تنها حالت‌های ممکن عبارت‌اند از:

$r_۳,r_۴\in\left\{\frac{۱}{۴},\frac{۷}{۴}\right\}$ و $r_۱,r_۲\in\left\{\frac{۳}{۴},\frac{۵}{۴}\right\}$ یا $r_۳,r_۴\in\left\{\frac{۳}{۴},\frac{۵}{۴}\right\}$ و $r_۱,r_۲\in\left\{\frac{۱}{۴},\frac{۷}{۴}\right\}$. در هر دو حالت $|m-n|=|r_۱r_۲-r_۳r_۴|=\frac{۱}{۲}$.

۱۹۵. x و y دو عدد طبیعی هستند، به‌طوری که: $\frac{x}{۳}+\frac{y}{۴}=\frac{۱۱}{۱۲}$. آن‌ها را بیابید.

معادله را به فرم ۴X+۳Y=۱۱ می‌نویسیم که یک معادله سیاله است. با توجه به طبیعی بودن X و Y، تنها جواب ممکن برابر است با: X=۲ و Y=۱.

۱۹۶. ریشه‌های معادلهٔ $[x^۳]+[x^۲]+[x]=\{x\}-۱$ را به‌دست آورید. ([x] نشان‌دهندهٔ جزءصحیح x و $\{x\}=x-[x]$.)

چون طرف دوم عددی صحیح است پس: $\{x\}=۰$ و در نتیجه x عددی صحیح است. بنابراین: $x^۳+x^۲+x+۱=۰$. با تجزیه معادله داریم: $(x^۲+۱)(x+۱)=۰$ که تنها جواب حقیقی آن برابر است با: ۱-.

۱۹۷. با فرض $f(x)=x^۲+۱۲x+۳۰$، ریشه‌های معادلهٔ زیر را پیدا کنید

$$f(f(f(f(f(x)))))=۰$$

چون $f(x)=(x+۶)^۲-۶$ پس: $f(f(x))=(x+۶)^۴-۶$ و $f(f(f(x)))=(x+۶)^۸-۶$ و ...

$f(f(f(f(f(x)))))=(x+۶)^{۳۲}-۶$

که ریشه‌های آن برابر است با: $x=-۶\pm\sqrt[۳۲]{۶}$.

۱۹۸. طول اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه برابر است با: a، ۲a+۲d و ۲a+۳d، که a و d دو عدد مثبت هستند. نسبت $\frac{a}{d}$ را بیابید.

چون مثلث قائم‌الزاویه است، پس:
$a^۲+(۲a+۲d)^۲=(۲a+۳d)^۲$. در نتیجه: $a^۲-۴ad-۵d^۲=۰$ یا $(a-۵d)(a+d)=۰$. چون: $d>۰$، پس: a=۵d و در نتیجه: $\frac{a}{d}=۵$.

۱۹۹. حاصل عبارت زیر را برحسب n به‌دست آورید:

$$A=(۱-\frac{۱}{۴})(۱-\frac{۱}{۹})(۱-\frac{۱}{۱۶})...(۱-\frac{۱}{n^۲})$$

$$A=(۱-\frac{۱}{۲})(۱+\frac{۱}{۲})(۱-\frac{۱}{۳})(۱+\frac{۱}{۳})...(۱-\frac{۱}{n})(۱+\frac{۱}{n})$$
$$=(\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۳}\times\frac{۳}{۴}\times...\frac{n-۱}{n})\times(\frac{۳}{۲}\times\frac{۴}{۳}\times...\times\frac{n+۱}{n})$$
$$=\frac{۱}{n}\times\frac{n+۱}{۲}=\frac{n+۱}{۲n}$$

۲۰۰. در شکل مستطیل را می‌بینید که با ۶ مربع پوشانده شده است. اگر ضلع کوچک‌ترین، مربع برابر یک باشد، ضلع بزرگ‌ترین مربع چه‌قدر است؟

اگر AB=a باشد، می‌توان بقیهٔ اضلاع را برحسب a به‌دست آورد. بزرگ‌ترین مربع ضلعی برابر a+۳ و از طرف دیگر ۲a-۱ خواهد داشت. در نتیجه داریم: a+۳=۲a-۱ و a=۴. پس ضلع بزرگ‌ترین مربع برابر است با ۷.